

Συστήματα εξυπηρέτησης

9/5

-1-

Σύστημα $M/G/1/\infty$

$P(t)$

$x(t)$

$t_1 < t_2 < t_3$

P_i : αριθμός των πελατών στο σύστημα μετά το τέλος της i -οστής εξυπηρέτησης

A_{n+1} : αριθμός των πελατών που φτάνουν στο σύστημα ~~στη~~ στη διάρκεια του $n+1$ χρόνου εξυπηρέτησης

$\{F_n : n = 1, 2, \dots\}$

$$P(A) = \int P(A/x) f(x) dx$$

$$F_{n+1} = \begin{cases} F_n - 1 + A_{n+1} & , F_n \geq 1 \\ A_{n+1} & , F_n = 0 \end{cases}$$

$P = \{P_{ij}\}$ (πίνακας μεταβάσεων)

$$P_{ij} = P(F_{n+1} = j \mid F_n = i)$$

$K_n = P \left(\begin{array}{l} n \text{ αφίξεις κατά τη} \\ \text{διάρκεια του χρόνου} \\ \text{εξυπηρέτησης} \end{array} \right)$

$$K_n = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} dB(t)$$

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \dots \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \dots \\ 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \dots \\ 0 & 0 & k_0 & k_1 & \dots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$(n_0, n_1, n_2, \dots) = (n_0, \dots) \cdot P$$

$$2^0 \quad n_0 = n_0 k_0 + n_1 k_0$$

$$2^1 \quad n_1 = n_0 k_1 + n_1 k_1 + n_2 k_0$$

$$2^2 \quad n_2 = n_0 k_2 + n_1 k_2 + n_2 k_1 + n_3 k_0$$

...

$$n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n_n z^n, \quad |z| < 1$$

$$k(z) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i z^i$$

$$n(z) = n_0 k(z) + n_1 k(z) + n_2 k(z) + \dots$$

$$n(z) = n_0 k(z) + \frac{k(z)}{2} (n_1 z + n_2 z^2 + n_3 z^3 + \dots)$$

$$n(z) = n_0 k(z) + \frac{k(z)}{2} (n(z) - n_0)$$

$$n(z) = \frac{n_0 k(z) (1 - \frac{1}{2})}{1 - \frac{k(z)}{2}}$$

$$n(z) = \frac{n_0 (1-z) k(z)'}{k(z) - 2}$$

$$K(z) = \sum_{i=0}^{\infty} K_i z^i = \sum_{i=0}^{\infty} z^i \int_0^{\infty} \frac{(A+t)^i e^{-At}}{i!} b(t) dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{At} e^{-At} b(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(A-Az)t} b(t) dt =$$

$$= b(A-Az)$$

$$K_i = \int_0^{\infty} \frac{A^i e^{-At}}{i!} b(t) dt$$

$$b(t) \xrightarrow{L} b(z)$$

Αρα $\pi(z) = \frac{\pi_0 (1-z) b(A-Az)}{b(A-Az) - z}$

$z=1 \rightarrow$ ρίγα και αποθνήσκει $\Rightarrow$
και αναπαύεται

$\Rightarrow$ είναι DZH

κατανομή εδω υπάρχει και άλλο βυθός.

$$1 = \pi(1) = \frac{-\pi_0 b(0)}{-\left. \frac{d b(u)}{du} \right|_{u=0} - 1} = \frac{-\pi_0}{A E(\text{εξον}) - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_0 = 1 - A E(\text{εξον}) = 1 - \rho, \quad \rho < 1$$

αρα $\rho = \frac{E(\text{εξον})}{E(\text{χρον. διαδ. απηλ.})} = \frac{E(\text{εξον})}{1/A} = A E(\text{εξον})$

Συνεπώς

$$\pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z) b(A-Az)}{b(A-Az) - z}$$

6' ρώνας

$$f_{n+1} = \begin{cases} f_n + 1 + A u_{n+1}, & f_n \geq 1 \\ A u_{n+1}, & f_n = 0 \end{cases}$$

Πάνω να βρω τις γεννήτριες.

$$\begin{aligned} \Pi(z) &= E(z^{F_{n+1}}) = E(z^{F_n - \Delta_n + A_{n+1}}) = \\ &= E(z^{F_n - \Delta_n}) E(z^{A_{n+1}}) = \end{aligned} \quad \text{όπου } \Delta_n = \begin{cases} 1, & \text{αν } F_n \geq 1 \\ 0, & \text{αν } F_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= E(z^{F_n - \Delta_n}) = z^0 (\Pi_0 + \Pi_1) + z^1 \Pi_2 + z^2 \Pi_3 + \dots = \\ &= z^0 \Pi_0 + \sum_{k=0}^{\infty} z^k \Pi_{k+1} = \Pi_0 + \frac{1}{2} (\Pi(z) - \Pi(0)) \end{aligned}$$

$$\Pi(z) = \left(\Pi_0 + \frac{1}{2} (\Pi(z) - \Pi_0) \right) b(1-z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pi(z) = \frac{\Pi_0 (1-z) b(1-z)}{b(1-z) - 2} \quad \text{και γενικότερα ομοίως το } \Pi_0$$

$$\left. \frac{d\Pi(z)}{dz} \right|_{z=1} = L_0$$

Πολλαρχεκ
κhintchine

$$L_0 = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2(1-\rho)}$$

Σύστημα M/M/1/∞

$$b(t) = \mu e^{-\mu t} \xrightarrow{L} \frac{\mu}{2+\mu}$$

$$n(z) = \frac{(1-p)(1-z) \frac{\mu}{\lambda - \lambda z + \mu}}{\frac{\mu}{\lambda - \lambda z + \mu} - z} = \frac{\mu(1-p)(1-z)}{\lambda z^2 - (\lambda + \mu)z + \mu}$$

(πίεζα παρουσιάζει 1, $\frac{\mu}{\lambda}$)

$$\begin{aligned} n(z) &= \frac{\mu(1-p)(1-z)}{\lambda(1-z)(\frac{\mu}{\lambda} - z)} = \frac{\mu(1-p)}{\mu - \lambda z} = \frac{1-p}{1 - \frac{\lambda}{\mu} z} = \frac{1-p}{1-pz} = \\ &= (1-p) \sum_{i=0}^{\infty} (pz)^i \end{aligned}$$

$$p_i = (1-p)p^i \quad p < 1$$

$$L = \rho + \frac{\rho^2 + (\frac{\lambda}{\mu})^2}{2(1-\rho)} = \rho + \frac{2\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Σύστημα $M/G/1/\infty$

Ορίσω $w(t)$: α.β.κ του χρόνου αναμονής του εργαίου πελάτη στο σύστημα

$$w(t) \xrightarrow{L} w^*(z)$$

$n(z) = P_n = P \left(\begin{array}{l} n \text{ πελάτες να εισέλθουν στο σύστημα} \\ \text{κατά την } n \text{ } \cancel{\text{εξέταση}} \text{ διαφορά του χρόνου αναμονής} \end{array} \right)$

$$P_n = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} d w(t)$$

$$n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda + z)^n}{n!} w(t) dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t(1-\rho)} \omega(t) dt = \omega^*(1-\rho)$$

$$\Pi(z) = \omega^*(1-\rho)$$

$$\omega^*(1-\rho) = \frac{(1-\rho)(1-\rho) \beta(1-\rho)}{\beta(1-\rho) - \lambda} \Rightarrow$$

$$\omega^*(x) = \frac{(1-\rho + \frac{x}{\lambda})(1-\rho) \beta(x)}{\beta(x) - 1 + \frac{x}{\lambda}}$$

$$\omega^*(x) = \frac{(1-\rho) \lambda \beta(x)}{\lambda \beta(x) - \lambda + x}$$

$$L(x) = \frac{d^k \Pi(z)}{dz^k} \Big|_{z=1} = \lambda^k \int_0^{\infty} t^k \omega(t) dt = \lambda^k \bar{\omega}_k$$

$$L(x) = \lambda^k \bar{\omega}_k$$

$$L_1 = \rho + \frac{(\lambda b_1)^2 + \lambda^2(b_2 - b_1^2)}{2(1-\rho)}$$

$$b_2 = c(\tau^2) \quad \begin{matrix} \nwarrow \text{χρόνος} \\ \nearrow \text{εξουπερίμευσης} \end{matrix}$$

$$b_1 = c(\tau)$$

$$\omega_1 = \frac{\lambda b_1}{\lambda} + \frac{\lambda^2(b_1^2 + b_2 - b_1^2)}{\lambda^2(1-\rho)} = b_1 + \frac{\lambda b_2}{2(1-\rho)}$$

$$\mu/\mu/L$$

$$G \equiv \exp(\mu)$$

$$w^*(z) = \frac{(1-p)z \frac{\mu}{z+\mu}}{2-\lambda + \frac{\lambda\mu}{z+\mu}} = \frac{\mu(1-p)}{2+\mu(1-p)}$$

-4-

$$w(t) = \mu(1-p) e^{-\mu(1-p)t}, \quad t \geq 0$$

$$\mu e^{-\mu x} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\mu}{2+\mu}$$

Παράδειγμα

Έχω $M/G/1/\infty$ σύστημα και υποθέτω ότι κάθε πελάτης που εισέρχεται ~~αυτός~~ δεν μένει εξυπηρετημένος με πιθανότητα q οπότε επαναλαμβάνει την εξυπηρέτηση. Να βρεθούν οι συναρτήσεις πιθανογεννήτριες.

Λύση

$$V_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

N : αριθμός επαναλήψεων

$N \sim \text{Geo}(1-q)$

$$N \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{(1-q)z}{1-qz}$$

(επαναλαμβάνει μέχρι που μ επιτυχή.)

Γνωρίζω ότι αν έχω ανεξάρτητα ανεξάρτητων και ισοδύναμων τ.μ με μετ/μο Laplace $F_X^*(z)$ και N μια μη αρνητική ακεραία τ.μ ανεξάρτητη από τ.μ έχω με πιθανογεννήτρια $P_N(s)$. Τότε ο μετ/μος Laplace της $V_N = X_1 + \dots + X_N$

$$\text{Δίνεται ως } F_{V_N}^*(z) = P_N(F_X^*(z))$$

$$F_{YN}^*(z) = P_N(F_X^*(z)) = \frac{(1-q) \theta(z)}{1-q \theta(z)}$$

$$\eta(z) = \frac{(1-p)/(1-z) F_{YN}^*(1-Az)}{F_{YN}^*(1-Az) - z}$$

Αν είχα $\mu/\mu/1/\infty \rightarrow \text{Exp}(\mu/(1-q))$

$$\text{Exp}(\mu) \rightarrow \frac{z}{2+\mu}$$

$$F_{YN}^* = \frac{\mu(1-q)}{2+\mu(1-q)}$$

$$\rho = (1-p)\rho^q$$

$$\text{όπου } \rho = \frac{\lambda}{\mu(1-q)} < 1$$

$\mu/G/1/\infty$ Ομοδίκες ουρές

Τα μεγέθη των ομίδων είναι ανεξάρτητα και ισόνομα τ.μ με ανεξάρτητα ποσοστά γκ, κ.μ και πεπραγμένη μέση τιμή $G(z)$. πολλαπλασιαστικά

Ψάχνω τον σωστό αριθμό πελατών που φτάνουν στο σύστημα & στην διαίρεση ενός χρόνου εξυπηρέτησης

$$V = N_1 + N_2 + \dots + N_r$$

r : αριθμός ουρών

N_i : μέγεθος ομίδας

Ψάχνω να βρω $E(2^r)$

$$E(z^Y) = E(z^{N_1 + \dots + N_F}) = \prod_{i=1}^F E(z^{N_i}) = G^F(z)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{G^k(z) e^{-\lambda x} (\lambda x)^k}{k!} = e^{-\lambda x (1 - G(z))}$$

$$\kappa(z) = E(z^Y) = \int_0^{\infty} e^{-(1 - \lambda G(z))x} b(x) dx = b(\lambda - \lambda G(z))$$

Συνεχώς $f_{n+1} = \begin{cases} N-1 + Y_{n+1} & f_n = 0 \\ f(n) - 1 + Y_{n+1} & f_n > 0 \end{cases}$

$$n(z) = E(z^{f_{n+1}}) = E(z^{-1 + Y_{n+1} + \Delta_n}) \quad \text{όπου} \quad \Delta_n = \begin{cases} N, & f_n = 0 \\ f_n, & f_n > 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} E(z^{Y_{n+1}}) E(z^{\Delta_n}) = \frac{1}{2} E(z^{\Delta_n}) b(\lambda - \lambda G(z))$$

$$E(z^{\Delta_n}) = \underbrace{E(z^{f_n})}_{\text{αλλά για } f(n) > 0 \text{ δεν έχουμε } 0} + \underbrace{E(z^N)}_{\rightarrow -n_0} =$$

$$= n_0 G(z) + n(z) - n_0$$

Άρα $n(z) = \frac{1}{2} b(\lambda - \lambda G(z)) (n_0 G(z) + n(z) - n_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow n(z) = \frac{b(\lambda - \lambda G(z)) n_0 (1 - G(z))}{b(\lambda - \lambda G(z)) - 2}$$

1. πηγα απίθμ.
μεν νερ.
→ 0214

Οα βρω το $n(0)$ και το $n(1) = 1$

$$p_0 = 1 - A b_1 m$$

όπου $m = G'(1) \leftarrow$ μέγος αριθμός κοτόπων που φτάνει σε μία οφίδα.
και $b_1 = E(\text{χρόνος εφην})$

$$\rho = d b_1 m < 1$$

Παραδείγματα

Έχω $u/G/1/\infty$ όπου όταν το σύστημα γίνεται κενό ο υπάλληλος αναχωρεί για χρόνο που είναι τ.μ. με κατανομή $G(x)$ και μέση τιμή G . Θέλω να προσδιορίσω πιθανότητες.

Λύση

Έστω f_n : ο αριθμός πελατών και τη n -οστή αναχώρηση
 u : - - - - - που βρίσκει ο υπάλληλος στο
σύστημα όταν αφήνει ένας κύκλος εξυπηρέτησης.

$$f_{n+1} = \begin{cases} u - 1 + A_{n+1} & , f_n = 0 \\ f_n - 1 + A_{n+1} & , f_n > 0 \end{cases}$$

A_{n+1} : ο αριθμός των πελατών που φτάνουν στο σύστημα κατά τη των εξυπηρέτησης του $n+1$

$$p(2) = E(2^{f_{n+1}}) = E(2^{-1 + A_{n+1} + \Delta_n}) = \frac{1}{2} E(2^{A_{n+1}}) E(2^{\Delta_n})$$

$$\text{όπου } \Delta_n = \begin{cases} u & , f_n = 0 \\ f_n & , f_n > 0 \end{cases}$$

Αρα $\eta(z) = \frac{1}{2} b(\lambda - \lambda_2) e(z^{\lambda_2})$

$e(z^{\lambda_2}) = \pi_0 e(z^{\lambda}) + \eta(z) - \pi_0$ ομοίως με πριν

$C_n = P(u \text{ βρεί } u \text{ πράξεις και } zw \text{ επιτοκίου } o \text{ συντάκτος}) =$

$$C_n = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t/(A+1)} t^n}{n!} c(t) dt$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_0^{\infty} \frac{e^{-t/(A+1)} t^n}{n!} c(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{(\lambda - \lambda_2)t} c(t) dt = C^*(\lambda - \lambda_2) \end{aligned}$$

Συνεπώς $\eta(z) = \frac{b(\lambda - \lambda_2)}{2} \left((C^*(\lambda - \lambda_2) - 1) \pi_0 + \eta(z) \right)$

$$\eta(z) = \frac{b(\lambda - \lambda_2) \pi_0 (1 - C^*(\lambda - \lambda_2))}{b(\lambda - \lambda_2) - 2}$$

$\eta(1) = 1 \Rightarrow$